

Funktionsgraph eine Gerade ist. Die Ableitung einer beliebigen Funktion an einer Stelle x_0 definiert man als die Steigung der Tangenten im Punkt $(x_0; f(x_0))$ des Graphen von f .

In arithmetischer Sprache gibt die Ableitung einer Funktion f für jedes x an, wie groß der lineare Anteil der Änderung von $f(x)$ ist (die Änderung 1. Ordnung), wenn sich x um einen beliebig kleinen Betrag Δx ändert. Für die exakte Formulierung dieses Sachverhalts wird der Begriff Grenzwert (oder Limes) verwendet.

In einer klassischen physikalischen Anwendung liefert die Ableitung der Orts- oder Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit die Momentangeschwindigkeit eines Teilchens. Die Ableitung der Momentangeschwindigkeit nach der Zeit liefert die momentane Beschleunigung.

1.1 Geschichte

Die Aufgabenstellung der Differentialrechnung war als Tangentenproblem seit der Antike bekannt. Ein naheliegender Lösungsansatz bestand darin, die Tangente an eine Kurve durch ihre Sekante über einem endlichen (endlich heißt hier: größer als null), aber beliebig kleinen Intervall zu approximieren. Dabei war die technische Schwierigkeit zu überwinden, mit einer solchen infinitesimal kleinen Intervallbreite zu rechnen. Die ersten Anfänge der Differentialrechnung gehen auf Pierre de Fermat zurück. Er entwickelte um 1628 eine Methode, Extremstellen von algebraischen Termen zu bestimmen und Tangenten an Kegelschnitte und andere Kurven zu berechnen. Seine „Methode“ war rein algebraisch. Fermat betrachtete keine Grenzübergänge und schon gar keine Ableitungen. Gleichwohl lässt sich seine „Methode“ mit modernen Mitteln der Analysis interpretieren und rechtfertigen und hat Mathematiker wie Newton und Leibniz nachweislich inspiriert. Einige Jahre später wählte René Descartes einen anderen algebraischen Zugang, indem er an eine Kurve einen Kreis anlegte. Dieser schneidet die Kurve in zwei nahe beieinanderliegenden Punkten; es sei denn, er berührt die Kurve. Dieser Ansatz ermöglichte es ihm, für spezielle Kurven die Steigung der Tangente zu bestimmen.

Ende des 17. Jahrhunderts gelang es Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz unabhängig voneinander, widerspruchsfrei funktionierende Kalküle zu entwickeln (zur Entdeckungsgeschichte und zum Prioritätsstreit siehe den Artikel Infinitesimalrechnung). Newton ging das Problem jedoch von einer anderen Seite an als Leibniz. Während Newton das Problem physikalisch über das Momentangeschwindigkeitsproblem anging, versuchte es Leibniz geometrisch über das Tangentenproblem. Ihre Arbeiten erlaubten das Abstrahieren von rein geometrischer Vorstellung und werden deshalb als Beginn der Analysis betrachtet. Bekannt wurden sie vor allem durch das Buch des Adligen Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital, der bei Johann Bernoulli Privatunterricht nahm und dessen Forschung zur Analysis so publizierte. Die heute bekannten Ableitungsregeln basieren vor allem auf den Werken von Leonhard Euler, der den Funktionsbegriff